

(۸۱) گزینه «۲» پاسخ صحیح می باشد.

از روش جبری برای یافتن تابع انتقال استفاده می کنیم:

$$[-(R-C) + (R-C)G_1]G_2 + (R-C)G_1G_2 = C$$

$$(R-C)(G_1G_2 - G_2 + G_1G_2) = C \Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{G_1G_2 - G_2 + G_1G_2}{1 + G_1G_2 - G_2 + G_1G_2}$$

(۸۲) گزینه «۳» پاسخ صحیح می باشد.

$$1 + GH = 0 \Rightarrow 2s^3 + 3s^2 + s + K = 0$$

روش تستی) مکان هندسی ریشه های تابع درجه سه  $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$  هنگامی با محور موهومی برخورد

می کند که  $a_0 = \frac{a_1a_2}{a_3}$  باشد. در این حالت فرکانس نوسانات برابر  $\omega = \pm \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$  است.

در نتیجه برای معادله مذکور خواهیم داشت:

$$K = \frac{1 \times 3}{2} = 1.5 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{K}{3}} = \pm \sqrt{\frac{1.5}{3}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(۸۳) گزینه «۱» پاسخ صحیح می باشد.

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} = \frac{3(1+3s) \cdot \frac{1}{s+1}}{1+3(1+3s) \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{10s+1}} = \frac{3(1+3s)(10s+1)}{(10s^2+11s+1)(4+9s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow C = \frac{3(1+3s)(10s+1)}{s(10s^2+11s+1)(4+9s)}$$

$$\text{OFFSET} = \lim_{s \rightarrow 0} s(R-C) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} sC = 1 - \frac{3 \times 1 \times 1}{1 \times 4} = \frac{1}{4}$$

(۸۴) گزینه «۳» پاسخ صحیح می باشد.

$$\phi = -2 \tan^{-1} \omega \Rightarrow PM = 180 - 2 \tan^{-1} \omega = 60 \Rightarrow \tan^{-1} \omega = 60 \Rightarrow \omega = \sqrt{3}$$

$$AR = (K^2 + 1) \cdot \frac{1}{1+\omega^2} \xrightarrow{AR=1} (K^2 + 1) \cdot \frac{1}{1+3} = 1 \Rightarrow K = \sqrt{3}$$

۸۵) گزینه «۱» پاسخ صحیح می باشد.

نقاط فرود و جدایی، نقاطی هستند که  $\xi = 1$  (میرای بحرانی):

$$1 + GH = 1 + s^2 + Ks + 4K = 0 \xrightarrow{\div (s^2 + Ks + 4K)} 1 + GH = 1 + \frac{1}{s^2 + Ks + 4K} = 1 + \frac{\frac{1}{4K}}{\frac{1}{4K}s^2 + \frac{1}{4}s + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{4K} s^2 + \frac{1}{4} s + 1 \Rightarrow 2 \times \frac{1}{\sqrt{4K}} \times 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow K = 16$$

$$1 + GH = 1 + \frac{1}{64} \frac{1}{\frac{1}{64}s^2 + \frac{1}{4}s + 1} \Rightarrow \text{Polar: } P_{1,2} = -8$$

$$\text{BIP: } \frac{1}{s - (-8)} + \frac{1}{s - (-8)} = 0 \Rightarrow \frac{2s + 16}{s + 8} = 0 \Rightarrow 2s + 16 = 0 \Rightarrow s = -8$$

۸۶) گزینه «۴» پاسخ صحیح می باشد.

از آنجایی که در ستون اول جدول روث برای این تابع مقدار صقر ظاهر می شود بنابراین بجای  $s$ ،  $\frac{1}{x}$  قرار می دهیم و

جدول روث را برای تابع جدید تشکیل می دهیم:

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 2 = 0 \xrightarrow{s = \frac{1}{x}} 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

|       |    |   |   |
|-------|----|---|---|
| $x^4$ | 2  | 1 | 1 |
| $x^3$ | 2  | 2 | 0 |
| $x^2$ | -1 | 1 |   |
| $x^1$ | 4  |   |   |
| $x^0$ | 1  |   |   |

با توجه به اینکه در ستون اول دو دفعه تغییر علامت ظاهر شده است در نتیجه تابع مورد نظر دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

۸۷) گزینه «۲» پاسخ صحیح می باشد.

رابطه فرارفت و فروکش بصورت  $DR = (OS)^2$  یا  $OS = \sqrt{DR}$  است در نتیجه شکل نمودار بایستی به مانند یک تابع رادیکالی باشد.

۸۸) گزینه «۴» پاسخ صحیح می باشد.

مقدار اولیه و مقدار نهایی تابع خروجی را بدست می آوریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \times \frac{1}{s} \times \frac{6s^2 + 2s + 1}{6s^2 + 2s + 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 2s + 1}{6s^2 + 2s + 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6}{6} = 1$$

مقدار اولیه:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{1}{s} \times \frac{6s^2 + 2s + 1}{6s^2 + 2s + 1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{6s^2 + 2s + 1}{6s^2 + 2s + 1} = 1$$

مقدار نهایی:

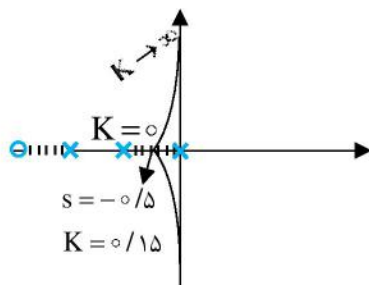
مقادیر اولیه و نهایی تنها در گزینه ۴ صادق است.

۸۹) گزینه «۲» پاسخ صحیح می باشد.

ریشه معادله مشخصه در خود معادله صدق می کند. در نقطه جدایی ( $s = -0.5$ ) پارامتر  $K_c$  را بدست می آوریم:

$$1 + GH = 1 + \frac{K_c(s+3)}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow s(s+1)(s+2) + K_c(s+3) = 0$$

$$s = -0.5 \Rightarrow -0.5 \times (0.5)(1.5) + K_c \times (2.5) = 0 \Rightarrow K_c = \frac{3}{20} = 0.15$$



مکان هندسی ریشه‌ها بصورت مقابل است. همانطوری که در شکل مشاهده می کنید از مقدار  $K = 0$  تا مقدار  $K = 0.15$  ریشه‌های سیستم روی محور حقیقی قرار دارند که پایدار هستند. اما از مقدار  $K = 0.15$  تا نزدیک به مجانب‌ها ( $K \rightarrow \infty$ ) مکان از محور حقیقی جدا شده و پاسخ در این قسمت نوسانی میرا خواهد بود. در نتیجه بایستی  $0 < K < 0.15$  باشد.

۹۰) گزینه «۱» پاسخ صحیح می باشد.

هنگامی سیستم در آستانه ناپایداری قرار می گیرد که  $GM = 1$  و  $PM = 0$  باشد.

$$GM = \frac{1}{AR_c} = 1 \Rightarrow AR_c = 1 \Rightarrow \frac{2 \times 1}{\omega_c(1 + \omega_c^2)} = 1 \Rightarrow \omega_c^2 + \omega_c - 2 = 0 \Rightarrow \omega_c = 1$$

$$PM = \pi + \phi_g = 0 \Rightarrow \pi - t_o \omega_c - \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \omega_c = 0 \xrightarrow{\omega_c=1} \pi - t_o - \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow t_o = 0$$

۹۱) گزینه «۴» پاسخ صحیح می باشد.

نکته) برای نوشتن یک تابع چند ضابطه‌ای بصورت یک ضابطه از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$F(t) = \begin{cases} f_1(t) & t < a_1 \\ f_2(t) & a_1 \leq t < a_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(t) & t \geq a_n \end{cases} \Rightarrow F(t) = f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]u(t - a_1) + [f_3(t) - f_2(t)]u(t - a_2) + \dots$$

بر اساس نمودار داده شده در صورت سوال داریم:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_o \\ 1 & t_o \leq t < 2t_o \\ -t + 2t_o & 2t_o \leq t < 3t_o \\ -t_o & 3t_o \leq t < 5t_o \\ 0 & t \geq 5t_o \end{cases} \Rightarrow$$

$$F(t) = u(t - t_o) + [-t + 2t_o - 1]u(t - 2t_o) + [-t_o + t - 2t_o]u(t - 3t_o) + t_o u(t - 5t_o)$$

$$F(t) = u(t - t_o) - (t - 2t_o)u(t - 2t_o) - u(t - 2t_o) + (t - 3t_o)u(t - 3t_o) + t_o u(t - 5t_o)$$

$$F(s) = L\{F(t)\} = \frac{e^{-st_o}}{s} - \frac{e^{-2st_o}}{s^2} - \frac{e^{-2st_o}}{s} + \frac{e^{-3st_o}}{s^2} + t_o \frac{e^{-5st_o}}{s}$$

$$F(s) = \frac{e^{-st_o}}{s^2} [s - (1+s)e^{-st_o} + e^{-2st_o} + st_o e^{-3st_o}]$$

۹۲) گزینه «۳» پاسخ صحیح می باشد.

$$1 + GH = 0 \Rightarrow s(s-1) + K_c(s+2) = 0 \Rightarrow s^2 + (K_c - 1)s + 2K_c = 0$$

برای اینکه معادله مشخصه‌ای پایدار باشد بایستی الزاماً تمامی ضرایب  $s^n$  ها مثبت باشد. در نتیجه بایستی  $K_c > 1$  باشد. به همین دلیل این سیستم در بهره‌های بالا پایدار و در بهره‌های پایین ناپایدار است.

۹۳) گزینه «۲» پاسخ صحیح می باشد.

نکته) برای سیستم‌های درجه دوم زمان لازم برای رسیدن پاسخ سیستم به مقدار  $\pm 0.2$  پاسخ حالت نهایی (Settling

$$\text{Time}) \text{ برابر است با: } T_s = \frac{4\tau}{\xi}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16} = \frac{16}{s^2 + 4s + 32} = \frac{0.5}{\frac{1}{32}s^2 + \frac{1}{8}s + 1}$$

$$\begin{cases} \tau^2 = \frac{1}{32} \Rightarrow \tau = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 2\tau\xi = \frac{1}{8} \Rightarrow 2 \times \frac{1}{4\sqrt{2}} \xi = \frac{1}{8} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow T_s = \frac{4 \times \frac{1}{4\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2$$

۹۴) گزینه «۲» پاسخ صحیح می باشد.

$$G = \frac{e^{-st_0}}{(\tau s + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} AR = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \phi = -t_0 \omega - 2 \tan^{-1} \tau \omega \end{cases}$$

$$AR = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow 0 & AR = 1 \\ \omega \rightarrow \infty & AR = \frac{1}{\tau^2 \omega^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\tau^2 \omega_c^2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_c} = 1 \end{cases}$$

$$\phi_c = -t_0 \omega_c - 2 \tan^{-1} \tau \omega_c = -\pi \xrightarrow{\omega_c=1, \tau=1} -t_0 - 2 \tan^{-1}(1) = -\pi \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$G = \frac{e^{-st_0}}{(\tau s + 1)^2} \xrightarrow[t_0 = \frac{\pi}{2}, \tau = 1]{} G = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s + 1)^2}$$

۹۵) گزینه «۴» پاسخ صحیح می باشد.

هنگامیکه سیستم همراه با تاخیر است بهتر است از GM و PM برای معیار پایداری استفاده کنیم. هنگامی سیستم در آستانه ناپایداری قرار می گیرد که  $GM = 1$  و  $PM = 0$  باشد.

$$GH = \frac{K e^{-\frac{\pi \gamma}{\nu} s}}{s(\pi s + 1)} \Rightarrow \begin{cases} AR = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \pi^{\gamma} \omega^{\gamma}}} \\ \phi = -\frac{\pi^{\gamma}}{\nu} \omega - \frac{\pi}{\nu} - \tan^{-1} \pi \omega \end{cases}$$

$$PM = \pi + \phi_g = \pi - \frac{\pi^{\gamma}}{\nu} \omega_g - \frac{\pi}{\nu} - \tan^{-1} \pi \omega_g = 0 \Rightarrow \frac{\pi^{\gamma}}{\nu} \omega_g + \tan^{-1} \pi \omega_g = \frac{\pi}{\nu} \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{\pi}$$

$$GM = \frac{1}{AR_g} = 1 \Rightarrow AR_g = \frac{K}{\omega_g \sqrt{1 + \pi^{\gamma} \omega_g^{\gamma}}} = 1 \Rightarrow \frac{K}{\frac{1}{\pi} \sqrt{1 + \pi^{\gamma} \times \frac{1}{\pi^{\gamma}}}} = 1 \Rightarrow K = \frac{\sqrt{\nu}}{\pi}$$