۱۳۱) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

معادله داده شده، معادله بسل اصلاح شده می‌باشد که بر اساس اینکه v عدد صحیح یا اعشاری باشد به یکی از دو صورت زیر است:

$$\begin{cases} y = c_1 I_v + c_2 I_{-v} & v \notin \mathbb{Z} \\ y = c_1 I_v + c_2 K_v & v \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۳۲) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$(1+x^2)y' + xy = 0 \Rightarrow y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

$$IF = \exp^{\int \frac{x}{1+x^2}dx} = \exp^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \exp^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

۱۳۳) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$I_0(0) = 1$$

۱۳۴) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}$$

$$x^2[\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}] + x[\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1}] + (x^2 - v^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s+2} - v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+s)^2 - v^2]a_n x^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+s} = 0$$

$$[s^2 - v^2]a_0 x^s + [(1+s)^2 - v^2]a_1 x^{1+s} + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+s)^2 - v^2]a_n x^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+s} = 0$$

$$[s^2 - v^2]a_0 x^s + [(1+s)^2 - v^2]a_1 x^{1+s} + \sum_{n=2}^{\infty}\Big([(n+s)^2 - v^2]a_n + a_{n-2}\Big)x^{n+s} = 0$$

برای اینکه عبارت سمت چپ برابر با صفر شود بایستی هر کدام از ۳ جمله برابر با صفر شود در نتیجه:

$$[s^2 - v^2]a_0 x^s = 0 \xrightarrow{a_0} [s^2 - v^2] = 0 \Rightarrow s^2 = v^2 \Rightarrow s = \pm v$$

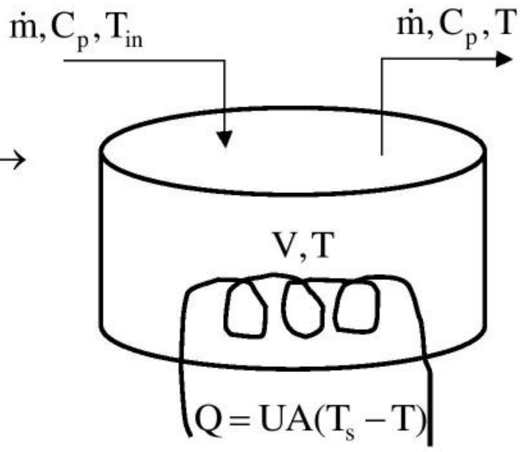
$$[(1+s)^2 - v^2]a_1 x^{1+s} = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big([(n+s)^2 - v^2]a_n + a_{n-2}\Big)x^{n+s} = 0 \Rightarrow [(n+s)^2 - v^2]a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+s)^2 - v^2}$$

بنابراین گزینه ۱، گزینه نادرستی است.

---

۱۳۵) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.



$$\dot{m}C_pT_{in} - \dot{m}C_pT + Q = mC_p\frac{dT}{dt}$$

$$\rho FC_pT_{in} - \rho FC_pT + UA(T_s - T) = \rho VC_p\frac{dT}{dt} \xrightarrow{\div \rho VC_p}$$

$$\frac{F}{V}T_{in} - \frac{F}{V}T + \frac{UA}{\rho VC_p}(T_s - T) = \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} + \left(\frac{F}{V} + \frac{UA}{\rho VC_p}\right)T = \frac{F}{V}T_{in} + \frac{UA}{\rho VC_p}T_s$$

معادله بدست آمده مرتبه اول، خطی و ناهمگن است.

---

۱۳۶) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t} + \sin 4t$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$\begin{cases} h_1(t) = e^{2t} \Rightarrow y_{p,1} = c_1t^2e^{2t} \\ h_2(t) = \sin 4t \Rightarrow y_{p,2} = c_2\sin 4t + c_3\cos 4t \end{cases} \rightarrow y_p = c_1t^2e^{2t} + c_2\sin 4t + c_3\cos 4t$$

---

۱۳۷) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

برای ذرات کروی معادله انتقال جرم بصورت زیر است:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}+V.\nabla C_A=D_{eff}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial C_A}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial C_A}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 C_A}{\partial\varphi^2}\right)\pm \text{reaction}$$

از نفوذ در جهت θ و φ و ترم های جابجایی در مقابل نفوذ در جهت r صرفنظر می‌کنیم و مساله در حالت پایا در نظر می‌گیریم و از آنجایی ماده A در حال مصرف شدن است از علامت منفی برای ترم واکنش استفاده می‌کنیم:

$$D_{eff}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial C_A}{\partial r})\right)-kC_A=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial C_A}{\partial r})-\frac{kC_A}{D_{eff}}=0\Rightarrow\frac{d^2C_A}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dC_A}{dr}-\frac{kC_A}{D_{eff}}=0$$

---

۱۳۸) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$D_A\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dC_A}{dr})-kC_A=0\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dC_A}{dr})-\frac{kC_A}{D_A}=0\Rightarrow r^2\frac{d^2C_A}{dr^2}+r\frac{dC_A}{dr}-\frac{k}{D_A}r^2C_A=0$$

معادله اخیر، معادله بسل تغییر یافته با ریشه مشخصه $p=0$ می‌باشد. در نتیجه جواب این معادله بصورت زیر است:

$$C_A(r)=c_1I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}r)+c_2K_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}r)$$

از آنجایی که استوانه توپر است در نتیجه بایستی در مرکز نیز غلظت دارای مقدار باشد. با توجه به اینکه $K_0(0)=+\infty$ است بایستی ضریب c_2 برابر صفر باشد.

$$C_A(R)=C_{As}=c_1I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}R)\Rightarrow c_1=\frac{C_{As}}{I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}R)}$$

$$C_A(r)=\frac{C_{As}}{I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}R)}I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}r)\Rightarrow\frac{C_A}{C_{As}}=\frac{I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}r)}{I_0(\sqrt{\frac{k}{D_A}}R)}$$

---

۱۳۹) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

معادله پیوستگی:

$$\rho=cte\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

معادله انتقال جرم:

$$\frac{\partial(uC_A)}{\partial x}+\frac{\partial(vC_A)}{\partial y}=D\frac{\partial^2C_A}{\partial y^2}-kC_A^n$$

$$u\frac{\partial C_A}{\partial x}+C_A\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial C_A}{\partial y}+C_A\frac{\partial v}{\partial y}=D\frac{\partial^۲ C_A}{\partial y^۲}-kC_A^n$$

$$\xrightarrow{C_A\frac{\partial u}{\partial x}+C_A\frac{\partial v}{\partial y}=۰} u\frac{\partial C_A}{\partial x}+v\frac{\partial C_A}{\partial y}+kC_A^n=D\frac{\partial^۲ C_A}{\partial y^۲}$$

---

۱۴۰) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

راحت‌ترین راه این است که مشتق گزینه‌ها را حساب کنیم تا ببینیم کدامیک به تابع erf(x) می‌رسند.

گزینه ۱:

$$\frac{dI}{dx}=\operatorname{erf}(x)+x\times\frac{۲}{\sqrt{\pi}}e^{-x^۲}-\frac{۲x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^۲}=\operatorname{erf}(x)$$

در نتیجه همین گزینه جواب صحیح است و نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست.

---

۱۴۱) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

برای برازش داده‌ها بایستی تابع خطا که بصورت زیر است را مینیمم کنیم:

$$\text{error}=\sum_{i=۱}^{n}[y_i-f(x_i)]^۲$$

---

۱۴۲) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases}۲x_۱+x_۲=۷\\ x_۱+۳x_۲=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱}{۲}(۷-x_۲)=\frac{۱}{۲}(۷-۱)=۳\\ x_۲=\frac{۱}{۳}(۱۱-x_۱)=\frac{۱}{۳}(۱۱-۲)=۳\end{cases}$$

تذکر: در صورتی که از روش گاوس-سایدل برای حل دستگاه استفاده کنید به گزینه ۱ می‌رسید.

---

۱۴۳) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^۲-۴}{۲x_n}=\frac{۲x_n^۲-x_n^۲+۴}{۲x_n}=\frac{x_n^۲+۴}{۲x_n}$$

$$\xrightarrow{x_۱=۳} x_۲=\frac{۹+۴}{۲\times۳}=\frac{۱۳}{۶}$$

---

۱۴۴) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

طرفین معادله را در x ضرب می‌کنیم:

$$yx = ax^{۲} + b \xrightarrow[x^{۲}=X]{yx=Y} Y = aX + b$$

$X = x^{۲}$	$Y = xy$
۱	۰
۱	۰
۴	۲

$$\Rightarrow \sum X_i^{۲} = ۱۸, \sum X_i = ۶, \sum X_i Y_i = ۸, \sum Y_i = ۲$$

$$\begin{bmatrix} ۱۸ & ۶ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۱۸a + ۶b = ۸ \\ ۶a + ۳b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}, b = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۲}{۳x}$$

---

۱۴۵) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

برای محاسبه میانگین بایستی از فرمول $\bar{T} = \frac{\int T dt}{\int dt}$ استفاده کنیم. از آنجایی در صورت سوال اشاره به بهترین تخمین کرده بایستی از سیمپسون برای محاسبه انتگرال استفاده کنیم. هنگامی که تعداد داده‌ها فرد است ($N = ۲$) بایستی از روش سیمپسون $\frac{۱}{۳}$ استفاده کنیم:

$$\bar{T} = \frac{\int T dt}{\int dt} = \frac{\frac{۴}{۳} \times [۴۹ + ۴ \times ۴۵ + ۴۷]}{۸} = ۴۶$$

---

۱۴۶) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$y_{i+۱} = y_i + hy'_i \Rightarrow y(۵) = y(۴) + ۱ \times [y(۴) - ۴ + ۱] = ۲y(۴) - ۳ = ۳ \Rightarrow y(۴) = ۳$$

$$y_{i+۱} = y_i + \frac{h}{۲}(y'_i + y'_{i+۱}) \Rightarrow y(۵) = y(۴) + \frac{۱}{۲}[y'(۴) + y'(۵)]$$

$$y(۵) = ۳ + \frac{۱}{۲}[(۳ - ۴ + ۱) + (۳ - ۵ + ۱)] = ۲/۵$$

۱۴۷) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

با توجه به جدول بدست آمده از درونیابی پیشرو استفاده شده است:

$$P_۲(r) = f_۱ + r\Delta f_۱ + \frac{r(r-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۱ = ۲۵ + ۴۰r + ۷/۵r(r-۱) = ۷/۵r^۲ + ۳۲/۵r + ۲۵$$

$$r = \frac{x - x_۰}{h} = \frac{۶/۲ - ۵}{۳} = ۰/۴$$

$$P_۲(۰/۴) = ۷/۵ \times (۰/۴)^۲ + ۳۲/۵ \times ۰/۴ + ۲۵ = ۱/۲ + ۱۳ + ۲۵ = ۳۹/۲$$

---

۱۴۸) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

شرط همگرایی برای روش گوس سایدل این است که ماتریس ضرایب غالب قطری (در هر ردیف قطر مطلق عدد موجود در قطر اصلی بیشتر از سایر اعداد موجود در آن ردیف) باشد:

گزینه ۱: ماتریس ضرایب بصورت $\begin{bmatrix} ۲۲ & -۱۸ \\ ۱۱ & -۹ \end{bmatrix}$ است که عدد |۹-| از عدد ۱۱ کمتر است.

گزینه ۲: ماتریس ضرایب بصورت $\begin{bmatrix} ۱۱ & -۹ \\ ۲۲ & -۱۸ \end{bmatrix}$ است که عدد |۱۸-| از عدد ۲۲ کمتر است.

گزینه ۳: ماتریس ضرایب بصورت $\begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۵ \\ ۸ & -۹ \end{bmatrix}$ است عدد ۱۱ از عدد ۱۵ کمتر است.

گزینه ۴: ماتریس ضرایب بصورت $\begin{bmatrix} ۱۱ & -۹ \\ ۱۲ & ۱۳ \end{bmatrix}$ است که غالب قطری است.

---

۱۴۹) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$F(x_۱, x_۲) = \begin{bmatrix} x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۱۰ \\ x_۱^۳ - ۲x_۱x_۲ + ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$J_F = \begin{bmatrix} ۲x_۱ & ۲x_۲ \\ ۳x_۱^۲ - ۲x_۲ & -۲x_۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{x_۱ = ۲, x_۲ = ۱} J_F = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

۱۵۰) هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

با توجه به گزینه‌ها از اختلافات مرکزی استفاده می‌کنیم:

$$D_A \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dC_A}{dr}) - kC_A = \frac{\partial C_A}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dC_A}{dr}) - \frac{kC_A}{D_A} = \frac{1}{D_A}\frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$\frac{d^2C_A}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dC_A}{dr} - \frac{k}{D_A}C_A = \frac{1}{D_A}\frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$\frac{d^2C_A}{dr^2} = \frac{C_{Ai+1,n+1} - 2C_{Ai,n+1} + C_{Ai-1,n+1}}{(\Delta r)^2} = C_{Ai+1,n+1} - 2C_{Ai,n+1} + C_{Ai-1,n+1}$$

$$\frac{dC_A}{dr} = \frac{C_{Ai+1,n+1} - C_{Ai-1,n+1}}{2\Delta r} = \frac{1}{2}(C_{Ai+1,n+1} - C_{Ai-1,n+1})$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{C_{Ai,n+1} - C_{Ai,n}}{\Delta t} = C_{Ai,n+1} - C_{Ai,n}$$

$$\Rightarrow C_{Ai+1,n+1} - 2C_{Ai,n+1} + C_{Ai-1,n+1} + \frac{1}{2r_i}(C_{Ai+1,n+1} - C_{Ai-1,n+1}) - \frac{k}{D_A}C_{Ai,n+1} = \frac{1}{D_A}(C_{Ai,n+1} - C_{Ai,n})$$

$$C_{Ai-1,n+1}(1 - \frac{1}{2r_i}) - C_{Ai,n+1}(2 + \frac{k+1}{D_A}) + C_{Ai+1,n+1}(1 + \frac{1}{2r_i}) = -\frac{C_{Ai,n}}{D_A}$$

تذکر: نزدیکترین گزینه به جواب، گزینه ۳ است. در صورت حذف نشدن سوال توسط سازمان سنجش و در صورتی که گزینه ۳ را انتخاب کرده باشید جواب شما صحیح در نظر گرفته می‌شود.