۱۳۱) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$u = y - ۴x \Rightarrow u' = y' - ۴ \Rightarrow y' = ۴ + u'$$

$$\frac{dy}{dx} = (y - ۴x)^۲ \Rightarrow ۴ + u' = u^۲ \Rightarrow \frac{du}{u^۲ - ۴} = dx \Rightarrow (\frac{۱}{u-۲} - \frac{۱}{u+۲})du = ۴dx$$

$$\int (\frac{۱}{u-۲} - \frac{۱}{u+۲})du = \int dx \Rightarrow \ln\frac{u-۲}{u+۲} = ۴x + c \Rightarrow \frac{y-۴x-۲}{y+۴x+۲} = ke^{۴x}$$

۱۳۲) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

می‌دانیم: $J_{\circ}(\circ) = ۱, Y_{\circ}(\circ) = -\infty$

$$T(x) = AY_{\circ}(x) + BJ_{\circ}(x) \Rightarrow T(\circ) = AY_{\circ}(\circ) + BJ_{\circ}(\circ) = A \times (-\infty) + B \times ۱ = ۲\circ\circ \Rightarrow \begin{cases} A = \circ \\ B = ۲\circ\circ \end{cases}$$

۱۳۳) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

می‌دانیم: $erf(x) = ۱ - erfc(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{\circ}^{x} e^{-t^۲}dt$

$$erf(p) = ۱ - erfc(p) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{\circ}^{p} e^{-t^۲}dt = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{erf(p)}{erfc(p)} = \frac{\frac{۱}{\sqrt{\pi}}}{۱ - \frac{۱}{\sqrt{\pi}}} = \frac{۱}{\sqrt{\pi} - ۱} \times \frac{\sqrt{\pi} + ۱}{\sqrt{\pi} + ۱} = \frac{\sqrt{\pi} + ۱}{\pi - ۱}$$

۱۳۴) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

شرایط مرزی با تغییر متغیر $\theta = T - T_{\infty}$ به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\theta(\circ, y) = \circ \ , \ \theta(L, y) = \circ \ , \ \theta(x, \circ) = \circ \ , \ \theta(x, H) = \circ$$

با توجه به اینکه شرط مرزی در جهت x همگن می‌باشد، در نتیجه در این جهت توابع ویژه، توابعی متعامد بوده و در جهت y توابع ویژه توابعی غیرمتعامد هستند.

۱۳۵) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\underbrace{(x^{-1}+y^{-1})}_{P(x,y)}dx+\underbrace{2axy^{-2}}_{Q(x,y)}dy=0$$

شرط کامل بودن : $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\frac{-1}{y^2}=\frac{2a}{y^2}\Rightarrow -1=2a\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

---

۱۳۶) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

در مسئله صفحه دو بعدی ناپایا در جهت مکان به توابع ویژه متعامد خواهیم رسید (رد گزینه‌های ۳و۴).

همچنین از آنجایی که شرط مرزی در مبدا از نوع اول می‌باشد، در نتیجه در جهت x تابع ویژه به صورت sin می‌باشد.

---

۱۳۷) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

معادله دیفرانسیل داده شده از نوع معادله دیفرانسیل کوشی – اویلر بوده که با تغییر متغیر $u=\ln x$ تبدیل به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌باشد که جواب آن عبارتست از:

$$\theta''_u+(3-1)\theta'_u-15\theta_u=0\Rightarrow\theta''_u+2\theta'_u-15\theta_u=0\Rightarrow\theta(u)=c_1e^{3u}+c_2e^{-5u}$$
$$u=\ln x\Rightarrow\theta(x)=c_1x^3+c_2x^{-5}$$

از آنجایی که مبدا مختصات جزء جواب این معادله دیفرانسیل می‌باشد، باید برای محدود شدن جواب در مبدا $c_2=0$ باشد. در نتیجه جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\theta(x)=c_1x^3$$

---

۱۳۸) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})-\frac{\partial u}{\partial y}-(u-1)=0\Rightarrow\frac{D}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+D\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\partial u}{\partial y}-(u-1)=0$$
$$\Delta=0-4\times D\times 0=0$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل داده شده از نوع سهمی می‌باشد.

---

۱۳۹) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$(qA)_x - (qA)_{x+dx} + \dot{q}Adx - hPdx\theta = 0 \xrightarrow{A=cte} q_x - q_{x+dx} + \dot{q}dx - \frac{hP}{A}dx\theta = 0$$

$$\xrightarrow{\div dx} \frac{q_x - q_{x+dx}}{dx} + \dot{q} - \frac{hP}{A}\theta = 0 \rightarrow -\frac{dq_x}{dx} + \dot{q} - \frac{hP}{A}\theta = 0 \xrightarrow{q=-k\frac{d\theta}{dx}} \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\theta}{dx}\right) - \frac{hP}{A}\theta = -\dot{q}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dk}{dx} + k\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{A}\theta = -\dot{q} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\alpha}{k}\frac{d\theta}{dx} - \frac{hP}{kA}\theta = -\frac{\dot{q}}{k}$$

---

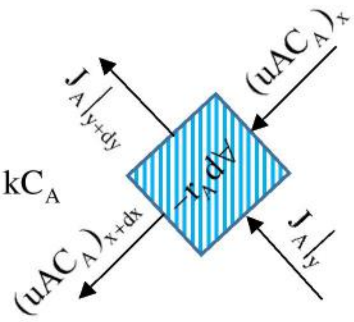
۱۴۰) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$(J_A.A)\big|_y - (J_A A)\big|_{y+dy} + (uAC_A)_x - (uAC_A)_{x+dx} - kC_A d\forall = 0$$

$$\xrightarrow{\div d\forall} \frac{J_A\big|_y - J_A\big|_{y+dy}}{dy} + \frac{(uC_A)_x - (uC_A)_{x+dx}}{dx} - kC_A = 0$$

$$-\frac{\partial J_{A_y}}{dy} - \frac{\partial (uC_A)_x}{dx} = kC_A \xrightarrow{J_{A_y}=-D\frac{\partial C_A}{\partial y}} D\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} - C_A\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial C_A}{\partial x} = kC_A$$

$$D\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} - u\frac{\partial C_A}{\partial x} = \left(k + \frac{\partial u}{\partial x}\right)C_A$$



---

۱۴۱) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$F(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_1 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow J[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 - 4 \end{bmatrix}$$

$$J[F(1,-1)] = \begin{bmatrix} -1-1 & 1 \\ 2\times(1) & 2\times(-1)-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

---

۱۴۲) سوال ناقص است.

طول گام باید مشخص باشد. با فرض اینکه طول گام برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد خواهیم داشت:

$$y = m\frac{\sin x}{x} \Rightarrow y = mX \quad ;$$

x

$X = \frac{\sin x}{x}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y	1	$\frac{2}{\pi}$

$$m=\frac{\sum_{i=1}^{2} y_i X_i}{\sum_{i=1}^{2} X_i^2}=\frac{0\times 1+\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}}{0^2+\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{\pi^2}$$

۱۴۳) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ و سیمپسون $\frac{3}{8}$ برای چندجمله‌ای‌های درجه سه و کمتر فاقد خطاست بنابراین اختلاف دو روش نیز برابر با صفر است.

۱۴۴) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

هنگامی که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد، دستگاه فاقد جواب معین است:

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 3c \\ 2c & 27 \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=8\times 27-3c\times 2c=0\Rightarrow c^2=36\Rightarrow c=\pm 6$$

۱۴۵) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\Delta x=\Delta y=10\,\text{cm}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-2\frac{°C}{cm^2}\Rightarrow \frac{T_B-2T_A+70}{10^2\,cm^2}+\frac{330-2T_A+390}{10^2\,cm^2}=-2\frac{°C}{cm^2}\Rightarrow -4T_A+790+T_B=-200$$

$$\Rightarrow 4T_A-T_B=990\,°C$$

با توجه به شکل مسأله، در راستای محور x تقارن برقرار است. بنابراین دمای نقاطی به فاصله یکسان با هم برابرند. در نتیجه دمای گره A با دمای گره B با هم برابرند.

$$4T_A-T_B=990\xrightarrow{T_A=T_B}3T_A=990\,°C\Rightarrow T_A=330\,°C$$

۱۴۶) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

فرم ماتریسی تابع درجه دو به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum f_i \\ \sum x_i f_i \\ \sum x_i^2 f_i \end{bmatrix}$$

در نتیجه با توجه ماتریس بدست آمده و صورت سوال $A_{22}=\sum x_i^2$, $F_2=\sum x_i y_i$ می‌باشد.

۱۴۷) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\frac{\Delta t}{(\Delta y)^{۲}} \le \frac{۱}{۲\alpha} \Rightarrow \frac{۰/۵}{(\Delta y)^{۲}} \le \frac{۱}{۲\times ۱/۶\times ۱۰^{-۵}} \Rightarrow (\Delta y)^{۲} \ge ۱۶\times ۱۰^{-۶} \Rightarrow \Delta y \ge ۴\times ۱۰^{-۳}\ \text{m} \Rightarrow \Delta y \ge ۴\text{mm}$$

---

۱۴۸) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$h^{۲} = \frac{۱۲\varepsilon}{(x_n - x_۰)\left|\max(f'')\right|} \ ;\ \varepsilon = ۰/۰۳۶\ ,\ x_۰ = -۱/۲\ ,\ x_n = ۰$$

$$f(x) = x + e^x \Rightarrow f'(x) = ۱ + e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

$$-۱/۲ \le x \le ۰ \Rightarrow e^{-۱/۲} \le e^x \le e^۰ \Rightarrow \left|\max f''(x)\right| = e^۰ = ۱$$

$$h^{۲} = \frac{۱۲\times ۰/۰۳۶}{(۰-(-۱/۲))\times ۱} \Rightarrow h^{۲} = ۰/۳۶ \Rightarrow h = ۰/۶$$

$$N = \frac{x_n - x_۰}{h} = \frac{۰-(-۱/۲)}{۰/۶} = ۲$$

---

۱۴۹) هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

در روش صریح مشتقات در زمان t (یا n) نوشته می‌شوند. در نتیجه تنها گزینه ۳ می‌تواند صحیح باشد. اما در صورتی که مسأله حل شود پی خواهیم برد که گزینه ۳ نیز صحیح نیست.

$$-k\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=L} = h\theta_L \Rightarrow -k\frac{\theta_{m,n}-\theta_{m-۱,n}}{\Delta x} = h\theta_{m,n} \Rightarrow \theta_{m,n}(h+\frac{k}{\Delta x}) = \frac{k}{\Delta x}\theta_{m-۱,n} \Rightarrow \theta_{m-۱,n} = (۱+\frac{h\Delta x}{k})\theta_{m,n}$$

---

۱۵۰) هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$t_۱ = ۱\times\Delta t \Rightarrow \theta_۱ = \theta_۰ + \frac{\Delta t}{۲}[\theta_۰ + ۰ + \theta_۱ + \Delta t] \Rightarrow \theta_۱ = \frac{(۱+\frac{\Delta t}{۲})\theta_۰ + \frac{۱}{۲}(\Delta t)^{۲}}{۱-\frac{\Delta t}{۲}}$$

$$t_۱ = ۲\times\Delta t \Rightarrow \theta_۲ = \theta_۱ + \frac{\Delta t}{۲}[\theta_۱ + \Delta t + \theta_۲ + ۲\Delta t] \Rightarrow \theta_۲ = \frac{(۱+\frac{\Delta t}{۲})\theta_۱ + \frac{۳}{۲}(\Delta t)^{۲}}{۱-\frac{\Delta t}{۲}}$$

$$\vdots$$

$$\theta_{i+۱} = \frac{(۱+\frac{\Delta t}{۲})\theta_i + \frac{۲n-۱}{۲}(\Delta t)^{۲}}{۱-\frac{\Delta t}{۲}}$$