۸۱) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

از روش جبری برای یافتن تابع انتقال استفاده می‌کنیم:

$$[-(R-C)+(R-C)G_1]G_3+(R-C)G_1G_2=C$$

$$(R-C)(G_1G_2-G_3+G_1G_3)=C\Rightarrow\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2-G_3+G_1G_3}{1+G_1G_2-G_3+G_1G_3}$$

---

۸۲) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$1+GH=0\Rightarrow 2s^3+3s^2+s+K=0$$

روش تستی) مکان هندسی ریشه‌های تابع درجه سه $a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$ هنگامی با محور موهومی برخورد می‌کند که $a_0=\frac{a_1a_2}{a_3}$ باشد. در این حالت فرکانس نوسانات برابر $\omega=\pm\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ است.

در نتیجه برای معادله مذکور خواهیم داشت:

$$K=\frac{1\times3}{2}=1/5\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{\frac{K}{3}}=\pm\sqrt{\frac{1/5}{3}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

۸۳) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C}{R}=\frac{G}{1+GH}=\frac{3(1+3s).\frac{1}{s+1}}{1+3(1+3s).\frac{1}{s+1}.\frac{1}{10s+1}}=\frac{3(1+3s)(10s+1)}{(10s^2+11s+1)(4+9s)}$$

$$R(s)=\frac{1}{s}\Rightarrow C=\frac{3(1+3s)(10s+1)}{s(10s^2+11s+1)(4+9s)}$$

$$OFFSET=\lim_{s\to0}s(R-C)=1-\lim_{s\to0}sC=1-\frac{3\times1\times1}{1\times4}=\frac{1}{4}$$

---

۸۴) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$\phi=-2\tan^{-1}\omega\Rightarrow PM=180-2\tan^{-1}\omega=60\Rightarrow\tan^{-1}\omega=60\Rightarrow\omega=\sqrt{3}$$

$$AR=(K^2+1).\frac{1}{1+\omega^2}\xrightarrow{AR=1}(K^2+1).\frac{1}{1+\sqrt{3}^2}=1\Rightarrow K=\sqrt{3}$$

۸۵) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

نقاط فرود و جدایی، نقاطی هستند که $\xi = 1$ (میرای بحرانی):

$$1+GH = 1+s^2+Ks+4K = 0 \xrightarrow{\div(s^2+Ks+4K)} 1+GH = 1+\frac{1}{s^2+Ks+4K} = 1+\frac{\frac{1}{4K}}{\frac{1}{4K}s^2+\frac{1}{4}s+1}$$

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{4K}}_{\tau^2}s^2+\underbrace{\frac{1}{4}}_{2\tau\xi}s+1 \Rightarrow 2\times\frac{1}{\sqrt{4K}}\times 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow K = 16$$

$$1+GH = 1+\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{64}s^2+\frac{1}{4}s+1} \Rightarrow \text{Polar}: P_{1,2} = -8$$

$$\text{BIP}: \frac{1}{s-(-8)}+\frac{1}{s-(-8)} = 0 \Rightarrow \frac{2s+16}{s+8} = 0 \Rightarrow 2s+16 = 0 \Rightarrow s = -8$$

---

۸۶) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

از آنجایی که در ستون اول جدول روث برای این تابع مقدار صفر ظاهر می‌شود بنابراین بجای s، $\frac{1}{x}$ قرار می‌دهیم و جدول روث را برای تابع جدید تشکیل می‌دهیم:

$$s^4+2s^3+s^2+2s+2 = 0 \xrightarrow{s=\frac{1}{x}} 2x^4+2x^3+x^2+2x+1 = 0$$

x^4	۲	۱	۱
x^3	۲	۲	۰
x^2	−۱	۱	
x^1	۴		
x^0	۱		

با توجه به اینکه در ستون اول دو دفعه تغییر علامت ظاهر شده است در نتیجه تابع مورد نظر دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

۸۷) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

رابطه فرارفت و فروکش بصورت $DR = (OS)^{۲}$ یا $OS = \sqrt{DR}$ است در نتیجه شکل نمودار بایستی به مانند یک تابع رادیکالی باشد.

---

۸۸) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

مقدار اولیه و مقدار نهایی تابع خروجی را بدست می‌آوریم:

مقدار اولیه:
$$\lim_{s\to\infty} sy(s) = \lim_{s\to\infty} s\times\frac{۱}{s}\times\frac{۶s^{۲}+۲s+۱}{۶s^{۲}+۲s+۱} = \lim_{s\to\infty}\frac{۶s^{۲}+۲s+۱}{۶s^{۲}+۲s+۱} = \lim_{s\to\infty}\frac{۶\cancel{s}}{۶\cancel{s}} = ۱$$

مقدار نهایی:
$$\lim_{s\to ۰} sy(s) = \lim_{s\to ۰} s\times\frac{۱}{s}\times\frac{۶s^{۲}+۲s+۱}{۶s^{۲}+۲s+۱} = \lim_{s\to ۰}\frac{۶s^{۲}+۲s+۱}{۶s^{۲}+۲s+۱} = ۱$$

مقادیر اولیه و نهایی تنها در گزینه ۴ صادق است.

---

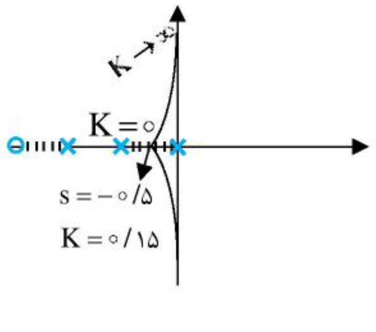
۸۹) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

ریشه معادله مشخصه در خود معادله صدق می‌کند. در نقطه جدایی ($s = -۰/۵$) پارامتر K_c را بدست می‌آوریم:

$$۱+GH = ۱+\frac{K_c(s+۳)}{s(s+۱)(s+۲)} = ۰ \Rightarrow s(s+۱)(s+۲)+K_c(s+۳) = ۰$$

$$s = -۰/۵ \Rightarrow -۰/۵\times(۰/۵)(۱/۵)+K_c\times(۲/۵) = ۰ \Rightarrow K_c = \frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$$

مکان هندسی ریشه‌ها بصورت مقابل است. همانطوری که در شکل مشاهده می‌کنید از مقدار $K = ۰$ تا مقدار $K = ۰/۱۵$ ریشه‌های سیستم روی محور حقیقی قرار دارند که پایدار هستند. اما از مقدار $K = ۰/۱۵$ تا نزدیک به مجانب‌ها ($K \to \infty$) مکان از محور حقیقی جدا شده و پاسخ در این قسمت نوسانی میرا خواهد بود. در نتیجه بایستی $۰ < K < ۰/۱۵$ باشد.



---

۹۰) گزینه «۱» پاسخ صحیح می‌باشد.

هنگامی سیستم در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد که $GM = ۱$ و $PM = ۰$ باشد.

$$GM=\frac{1}{AR_c}=1\Rightarrow AR_c=1\Rightarrow \frac{2\times 1}{\omega_c(1+\omega_c^2)}=1\Rightarrow \omega_c^3+\omega_c-2=0\Rightarrow \omega_c=1$$

$$PM=\pi+\phi_g=0\Rightarrow \pi-t_0\omega_c-\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\omega_c=0\xrightarrow{\omega_c=1}\pi-t_0-\frac{\pi}{2}-2\times\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow t_0=0$$

---

۹۱) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

نکته) برای نوشتن یک تابع چند ضابطه‌ای بصورت یک ضابطه از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$F(t)=\begin{cases} f_1(t) & t<a_1 \\ f_2(t) & a_1\le t<a_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(t) & t\ge a_n \end{cases}\Rightarrow F(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]u(t-a_1)+[f_3(t)-f_2(t)]u(t-a_2)+\cdots$$

بر اساس نمودار داده شده در صورت سوال داریم:

$$F(t)=\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1 & t_0\le t<2t_0 \\ -t+2t_0 & 2t_0\le t<3t_0 \\ -t_0 & 3t_0\le t<5t_0 \\ 0 & t\ge 5t_0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$F(t)=u(t-t_0)+[-t+2t_0-1]u(t-2t_0)+[-t_0+t-2t_0]u(t-3t_0)+t_0u(t-5t_0)$$

$$F(t)=u(t-t_0)-(t-2t_0)u(t-2t_0)-u(t-2t_0)+(t-3t_0)u(t-3t_0)+t_0u(t-5t_0)$$

$$F(s)=L\{F(t)\}=\frac{e^{-st_0}}{s}-\frac{e^{-2st_0}}{s^2}-\frac{e^{-2st_0}}{s}+\frac{e^{-3st_0}}{s^2}+t_0\frac{e^{-5st_0}}{s}$$

$$F(s)=\frac{e^{-st_0}}{s^2}[s-(1+s)e^{-st_0}+e^{-2st_0}+st_0e^{-4st_0}]$$

---

۹۲) گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد.

معادله مشخصه این تابع برابرست با: $1+GH=0\Rightarrow s(s-1)+K_c(s+2)=0\Rightarrow s^2+(K_c-1)s+2K_c=0$

برای اینکه معادله مشخصه‌ای پایدار باشد بایستی الزاما تمامی ضرایب s^n ها مثبت باشد. در نتیجه بایستی $K_c>1$ باشد. به همین دلیل این سیستم در بهره‌های بالا پایدار و در بهره‌های پایین ناپایدار است.

۹۳) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

نکته) برای سیستم‌های درجه دوم زمان لازم برای رسیدن پاسخ سیستم به مقدار ۲٪± پاسخ حالت نهایی (Settling Time) برابر است با : $T_s = \frac{4\tau}{\xi}$

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{16}{s^2+4s+16}}{1+\frac{16}{s^2+4s+16}} = \frac{16}{s^2+4s+32} = \frac{0/5}{\frac{1}{32}s^2+\frac{1}{8}s+1}$$

$$\begin{cases} \tau^2 = \frac{1}{32} \Rightarrow \tau = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 2\tau\xi = \frac{1}{8} \Rightarrow 2\times\frac{1}{4\sqrt{2}}\xi = \frac{1}{8} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow T_s = \frac{4\times\frac{1}{4\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2$$

---

۹۴) گزینه «۲» پاسخ صحیح می‌باشد.

$$G = \frac{e^{-st_0}}{(\tau s+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} AR = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} \\ \phi = -t_0\omega - 2\tan^{-1}\tau\omega \end{cases}$$

$$AR = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega \to 0 & AR = 1 \\ \omega \to \infty & AR = \frac{1}{\tau^2\omega^2} \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\tau^2\omega_c^2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_c} = 1$$

$$\phi_c = -t_0\omega_c - 2\tan^{-1}\tau\omega_c = -\pi \xrightarrow[\tau=1]{\omega_c=1} -t_0 - 2\tan^{-1}(1) = -\pi \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$G = \frac{e^{-st_0}}{(\tau s+1)^2} \xrightarrow[\tau=1]{t_0=\frac{\pi}{2}} G = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+1)^2}$$

---

۹۵) گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد.

هنگامیکه سیستم همراه با تاخیر است بهتر است از GM و PM برای معیار پایداری استفاده کنیم. هنگامی سیستم در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد که $GM = 1$ و $PM = 0$ باشد.

$$GH=\frac{Ke^{-\frac{\pi^{۲}}{۴}s}}{s(\pi s+۱)}\Rightarrow\begin{cases}AR=\dfrac{K}{\omega\sqrt{۱+\pi^{۲}\omega^{۲}}}\\ \phi=-\dfrac{\pi^{۲}}{۴}\omega-\dfrac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\pi\omega\end{cases}$$

$$PM=\pi+\phi_g=\pi-\frac{\pi^{۲}}{۴}\omega_g-\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\pi\omega_g=\circ\Rightarrow\frac{\pi^{۲}}{۴}\omega_g+\tan^{-۱}\pi\omega_g=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\omega_g=\frac{۱}{\pi}$$

$$GM=\frac{۱}{AR_g}=۱\Rightarrow AR_g=\frac{K}{\omega_g\sqrt{۱+\pi^{۲}\omega_g^{۲}}}=۱\Rightarrow\frac{K}{\frac{۱}{\pi}\sqrt{۱+\pi^{۲}\times\frac{۱}{\pi^{۲}}}}=۱\Rightarrow K=\frac{\sqrt{۲}}{\pi}$$